Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2006

Soru:
a, b, c gerçel sayıları $a \geq 1$ ve $a + b + c = 0$ koşullarını sağlıyorsa,

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:
Cevap: $\frac{3}{8}$.

1. $bc \leq \frac{a^2}{4}$ olduğunu gösterelim:

ispatlanacak eşitsizlikte $-a = b + c$ yazarsak
$bc \leq \dfrac{b^2 + c^2 + 2bc}{4}$ veya $(b - c)^2 \geq 0$.

2. $b^4 + c^4 \geq \frac{a^4}{8}$ olduğunu gösterelim:

ispatlanacak eşitsizlikte$-a = b + c$ yazarsak,
$8b^4 + 8c^4 \geq b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$ veya
$4b^4 + 4c^4 - 4bc^3 - 4b^3c + 3b^4 + 3c^4 - 6b^2c^2 \geq 0$ veya
$4(b^3 - c^3)(b - c) + 3(b^2 - c^2)^2 \geq 0,$
elde ederik. $b^3 - c^3$ ve $b - c$ ifadelerinin işaretlerinin aynı olduğundan son eşitsizlik barizdir.

1. ve 2. eşitsizliklerinden

$$a^4+b^4+c^4-3abc \geq a^4+\frac{a^4}{8}-3\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2(\frac{3}{2}a^2-1)$$

elde ederiz. $f(x)=\frac{3}{4}x^2(\frac{3}{2}x^2-1)$ funksiyonu $[1,\infty)$ aralığında artandır ve en küçük değerini $x=1$ noktasında alıyor:

$$a^4+b^4+c^4-3abc \geq \frac{3}{8}.$$

$a=1$, $b=c=-\frac{1}{2}$ ise $a^4+b^4+c^4-3abc$ ifadesi tam olarak $\frac{3}{8}$ e eşittir.