Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2006

Soru:
Hepisi birbirinden farklı $a_1, a_2, \ldots, a_N$ pozitif tam sayıları aşağıdaki koşulları sağlıyor:

1. $a_i < 22$, $1 \le i \le N$.

2. k, l, m, n sayıları hepisi farklıysa, $a_k + a_l \neq a_m + a_n$.

N sayısının alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: Cevap: $N = 7$. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13$ ve $a_7 = 21$ alırsak, $N \geq 7$ olduğunu görürüz. $N < 8$ olduğunu gösterelim.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ koşulları sağla yan sayılar olsun. Tüm (a_i, a_j), $a_i > a_j$ ikililerini alalım. $a_i - a_j$ ifadesi $[1, 20]$ aralığında değerler alıyor.

(a_k, a_l) ve (a_p, a_q) ikilileri için $a_k - a_l = a_p - a_q$ olsun. O zaman $l = p$ olma zorunda (diğer durumda $a_k + a_q = a_p + a_l$ ve koşullar sağlanmıyor). Bu durumda a_l sayısına (a_k, a_l) ve (a_l, a_q) ikililerinin "ortak" elemanı diyelim. a_l sayısı sadece (a_k, a_l) ve (a_l, a_q) ikililerinin "ortak" elemanı ola bilir: Diğer (a_r, a_l) ve (a_l, a_s) ikilileri varsa, $a_r + a_s = a_k + a_q$, çelişki. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının en büyüyü ve en küçüyü "ortak" eleman olamaz. Dolayısıyla, $a_i - a_j$ farkları en fazla $20 - 1 + n - 2 = 17 + n$ değer alıyor. Toplam ikili sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan, $17 + n \geq \frac{n(n-1)}{2}$ ve ya $n^2 - 3n \leq 36$. Sonuç olarak $n < 8$.