Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2006

Soru: Aşağıdaki eşitliği sağlayan tüm x ve y reel sayılarını bulunuz:

$$8x^2 - 2xy^2 = 6y = 3x^2 + 3x^3y^2$$

Çözüm: $8x^2 - 2xy^2 = A$, $6y = B$, $3x^2 + 3x^3y^2 = C$ olsun.

$A = C$ eşitliğinden $x(5x - 2y^2 - 3x^2y^2) = 0$ elde ederiz. $x = 0$ (bu durumda $y = 0$) ve $x \neq 0$ durumları vardır. $x \neq 0$ ise, $y^2 = \dfrac{5x}{2+3x^2}$ ve $x > 0$. $x > 0$ durumunda $y > 0$ ($B = C$ eşitliğinden $2y = x^2 + x^3y^2$).

$2y = x^2 + x^3y^2$ eşitliğinin her iki tarafının karesini alalım:

$$4y^2 = x^4 + x^6y^4 + 2x^5y^2$$

y^2 yerine $\dfrac{5x}{2+3x^2}$ yazalım:

$$\frac{20x}{2+3x^2} = x^4 + \frac{25x^8}{(2+3x^2)^2} + \frac{10x^6}{2+3x^2}$$

$x \neq 0$ olduğundan

$20(2+3x^2) = x^4(2+3x^2)^2 + 25x^7 + 10x^5(2+3x^2)$ veya

$16x^7 + 8x^5 + x^3 - 15x^2 - 10 = 0.$

Çarpanlarına ayırırsak:

$(x-1)(16x^6 + 16x^5 + 24x^4 + 24x^3 + 25x^2 + 10x + 10) = 0$

elde ederiz. $x > 0$ olduğundan tek çözüm $x = 1$ (bu durumda $y = 1$).

Sonuç olarak iki çözüm vardır: $(0,0)$ ve $(1,1)$.