Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2006

Soru: Aşağıdaki eşitliği sağlayan tüm m, n ve k doğal sayılarını bulunuz:

$$5^m + 7^n = k^3.$$

Çözüm: (m, n, k) üçlüsü $5^m + 7^n = k^3$ denkleminin çözümü olsun.

1. n sayısının tek olduğunu ispatlayalım:
k cift olma zorunda olduğundan denklemin sağ tarafı 8 ile bölünüyor. Denklemin sol tarafını 8 modunda inceleyelim: 5^m ifadesi m çift ise 1, m tek ise 5, 7^n ifadesi ise n çift ise 1, n tek ise 7 oluyor. Tek seçenek: m çift, n tek.

2. m sayısının 3 ile bölündügünü gösterelim:
k sayisi 7 ile bölünüyorsa, 5^m sayısı da 7 ile bölünmek zorunda, olamaz. k sayısı 7 ile bölünmüyor: $k^3 = 1$ veya -1 $(mod 7)$. Demek ki, $5^m = 1$ veya -1 $(mod 7)$. Tek seçenek: $m = 3l$.

3. $m = 3l$ ise:

$$7^n = k^3 - 5^{3l} = (k - 5^l)(k^2 + 5^l k + 5^{2l}).$$

İkinci çarpan en az 3 olduğundan 7 ile bölünmek zorundadır.

Birinci çarpan $k - 5^{m'} = 1$ ise, $5^m + 7^n = k^3 = 1(mod 5)$ ve n tek olduğundan, $7^n = 1(mod 5)$. Olanaksız (n sayısı tek sayıdır).

Birinci çarpan $(k - 5^l)$ 7 ile bölünüyorsa, bu çarpanın karesi $k^2 - 2 \cdot 5^{m'} k + 5^{2l}$ de 7 ile bölünüyor. İkinci çarpan $k^2 + 5^l k + 5^{2l}$ ifadesi de 7 ile bölündügünden bu ifadelerin farkları olan $3 \cdot 5^{m'}k$ ifadesi de 7 ile bölünüyor. $5^m \neq 0(mod7)$ olduğundan k sayısı 7 ile bölünüyor. k 7 ile bölünüyorsa, 5^m ifadesi de 7 ile bölünüyor ($5^m + 7^n = k^3$). Sonuç olarak denklemin doğal sayılarda çözümü yoktur (negatif olmayan tam sayı çözümü ise sadece (0,1,2) üçlüsüdür).