Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2005

Soru: Aşağıdaki eşitliği sağlayan tüm a, b, c doğal sayı üçlülerini bulunuz:

$$ab + c = (a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) = 239^2.$$

İki doğal sayının, n ve m'nin, en büyük ortak böleni (n, m) ile gösterilmiştir.

Çözüm: $a, b,$ ve c'nin en büyük ortak bölenini $d > 1$ kabul edelim. O zaman d sayısı 239^2'yi böler ve 239 asal sayı olduğu için $d \geq 239$ olur. Bu durumda $(a^2, b^2) \geq 239^2$ elde edilir ki çelişkidir. Böylece a, b ve c aralarında asal olur ve $(a, bc) = (a, b) \cdot (a, c)$, $(b, ac) = (a, b) \cdot (b, c)$, $(c, ab) = (c, a) \cdot (c, b)$ $(a^2, b^2) = (a, b)^2$ eşitlikleri geçerlidir. Eşitliği tekrar yazarsak;

$$\big((a, b) + (a, c)\big)\big((a, b) + (b, c)\big) = 239^2$$

elde ederiz. $(a, b) \geq 1, (a, c) \geq 1$, ve $(b, c) \geq 1$, olduğundan, tek geçerli seçenek

$$(a, b) + (a, c) = 239 \text{ ve } (a, b) + (b, c) = 239$$

olur. a, b ve c aralarında asal oldukları için, $(a, c) = (b, c) = 1$ ve $(a, b) = 238$ elde edilir. $ab+c = 239^2$ ve $(a, b) = 238$ eşitliklerinden dolayı $a = b = 238$'dir çünkü aksi durumda $ab > 239^2$ olur. Sonuç olarak $a = 238, b = 238, c = 477$ tek çözümdür.